Vektoranalysis

Gauß‘scher Integralsatz

Vektoranalysis

Gauß‘scher Integralsatz

Inhalt

Übersicht:

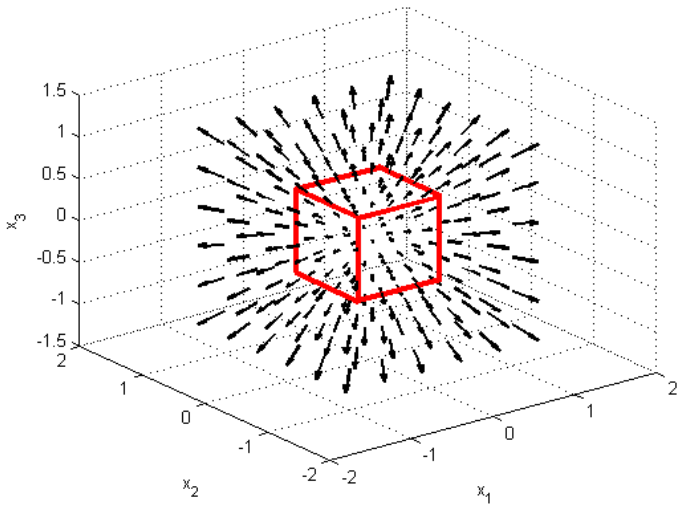
- Heuristische Herleitung
- Physikalische Herleitung
- Bedeutung des Gauß‘schen Satzes
- Anwendungen:
  - Vereinfachte Rechnung
  - Kontinuitätsgleichung

Vektoranalysis

Gauß'scher Integralsatz

Heuristische Herleitung

Wir betrachten folgende Problemstellung…



Eine Flüssigkeit strömt mit Geschwindigkeit $\vec{v}$ durch ein würfelförmiges Volumen V.

Wir suchen den Fluss durch die Oberfläche ∂V pro Zeiteinheit (Volumenstrom Q) .

→ Wir müssen das Oberflächenintegral berechnen…

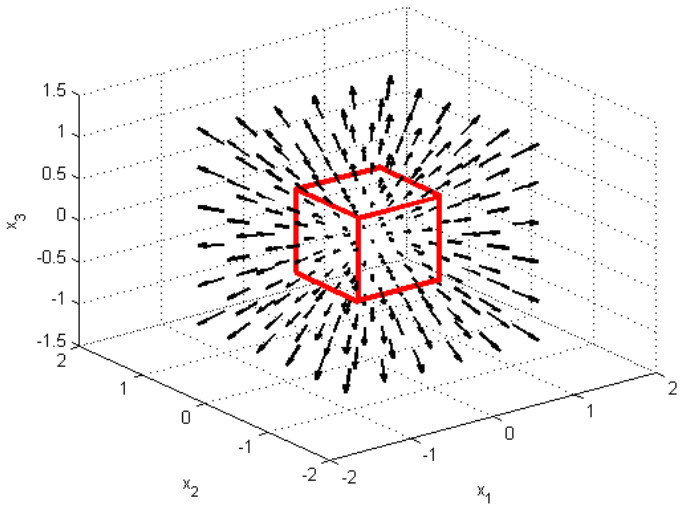
→ $$Q = \oiint_{\partial V} \vec{v} \cdot \overrightarrow{dA}$$

↑ kennzeichnet eine geschlossen Oberfläche

Vektoranalysis

Gauß'scher Integralsatz

Heuristische Herleitung



Wir betrachten folgende Problemstellung…

Eine Flüssigkeit strömt mit Geschwindigkeit $\vec{v}$ durch ein würfelförmiges Volumen V.

Wir suchen den Fluss durch die Oberfläche ∂V pro Zeiteinheit (Volumenstrom Q) .

Alternative Sichtweise…

Die ausströmende Flüssigkeit stammt von Quellen im Volumen.

Die Quellen bestimmen also den Fluss durch die Oberfläche.

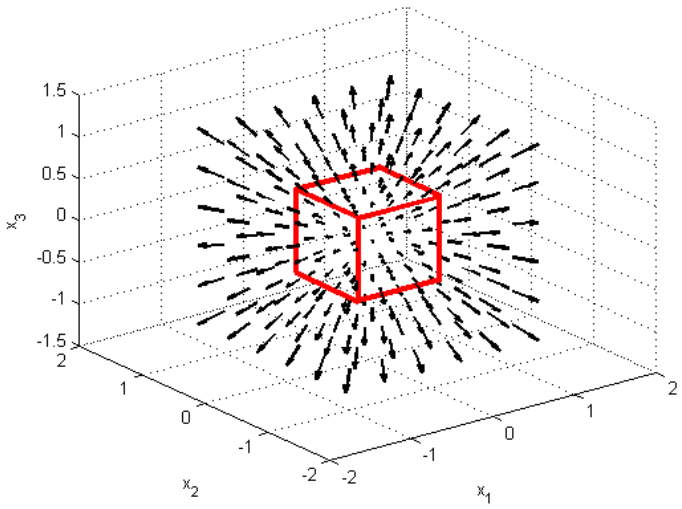
⇒ Wir summieren alle Quellen und Senken…

Vektoranalysis

Gauß'scher Integralsatz

Heuristische Herleitung

Wir summieren alle Quellen und Senken…



Wie gehen wir vor?

Wir unterteilen das Volumen in kleine Kontrollvolumina (Würfel)

Den Volumenstrom im Würfel dV erhalten wir mit Hilfe der Divergenz…

$$Q_{dV} = \operatorname{div} \vec{v} \cdot dV$$

Wir summieren den Volumenstrom aller Würfel…

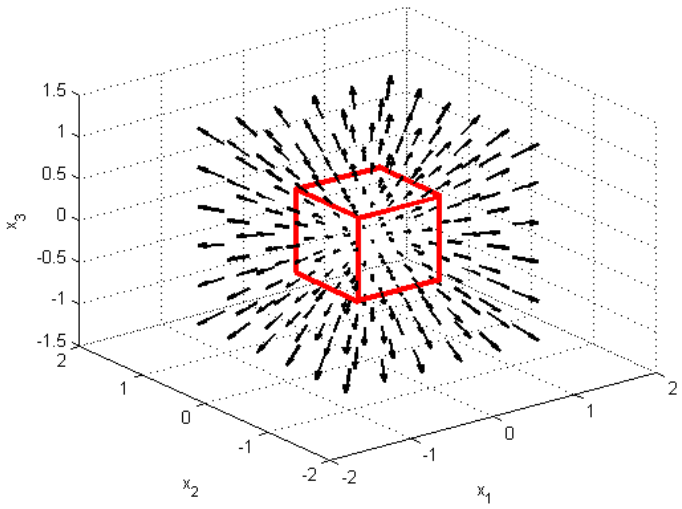
$$Q = \iiint_V \operatorname{div} \vec{v} \cdot dV$$

Vektoranalysis

Gauß'scher Integralsatz

Heuristische Herleitung

Wir fassen unser Ergebnis zusammen…



Fluss/Volumenstrom:

Oberflächenintegral $$Q = \oiint_{\partial V} \vec{v} \cdot \overrightarrow{dA}$$

Volumenintegral $$Q = \iiint_{V} \operatorname{div} \vec{v} \cdot dV$$

Gauß'scher Integralsatz:

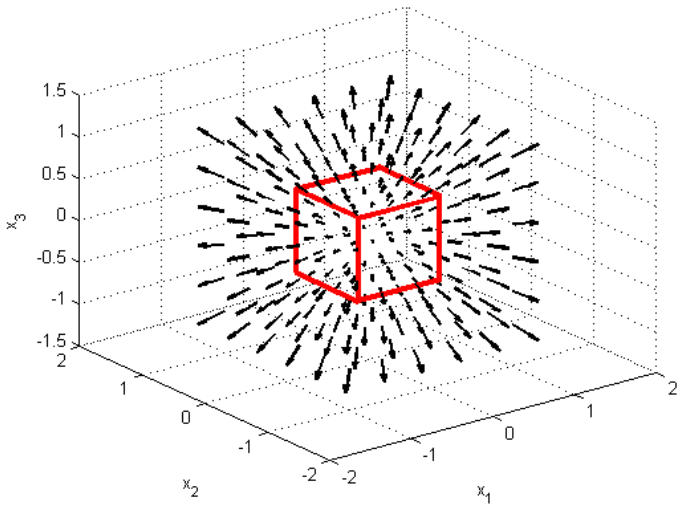
$$\oiint_{\partial V} \vec{v} \cdot \overrightarrow{dA} = \iiint_{V} \operatorname{div} \vec{v} \cdot dV$$

Vektoranalysis

Gauß'scher Integralsatz

Aussage/Bedeutung

Was ist die Bedeutung bzw. die Aussage des Gauß'schen Integralsatzes?



$$\oiint_{\partial V} \vec{v} \cdot \overrightarrow{dA} = \iiint_{V} \operatorname{div} \vec{v} \cdot dV$$

Bedeutung:

Es spielt keine Rolle, ob wir den Fluss am Rand des Volumens zählen, oder ob wir im Volumen alle Quellen und Senken summieren.

Analogie:

Anzahl der Studierenden im Hörsaal…

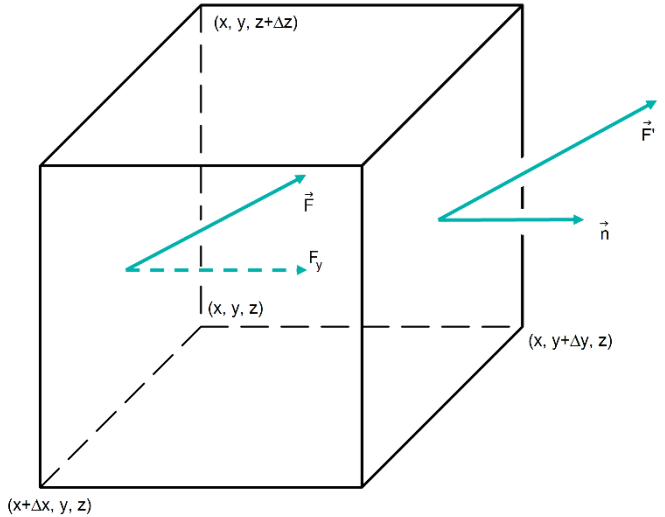
1. Zähle Studierende die in den leeren Hörsaal gehen oder ihn verlassen.
2. Zähle Studierenden im Hörsaal.

Vektoranalysis

Gauß'scher Integralsatz

Physikalische Herleitung

Wir suchen den Fluss des Vektorfeldes $\vec{F}$ durch die Oberfläche eines Würfels.



Vorgehensweise:

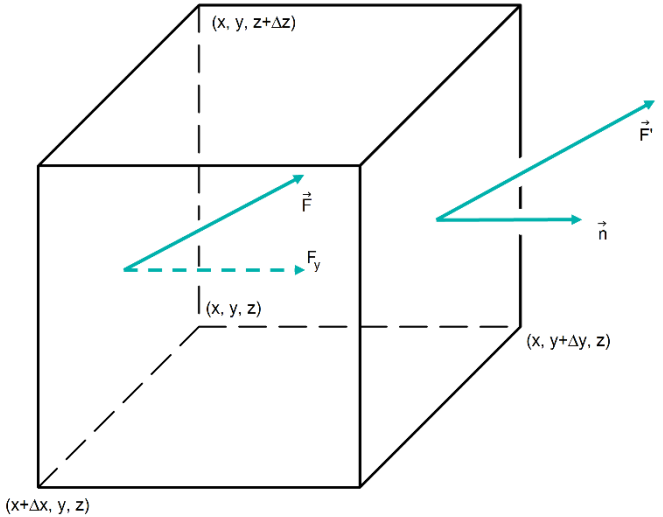
Wir betrachten den Fluss durch alle Seiten, getrennt für jede Koordinatenrichtung.

Anschließend Summieren wir alle Beiträge auf

Gauß'scher Integralsatz

Physikalische Herleitung

Wir suchen den Fluss des Vektorfeldes $\vec{F}$ durch die Oberfläche eines Würfels.



Fluss durch linke Seite…

Allgemein Fluss in y-Richtung per Oberflächenintegral…

$$\Phi_L = -\iint F_y \, dx \, dz$$

(Minus, da Normale nicht in $\vec{F}$-Richtung zeigt!)

Annahme: Der Würfel ist klein (infinitesimal klein)

- Die y-Komponente F_y ändert sich auf der Würfelfläche kaum
- Approximation: $F_y \approx F_y(x, y, z)$
- Approximierter Fluss: $\Phi_L = -\iint F_y \, dx \, dz \approx -F_y(x, y, z)\Delta x \Delta z$

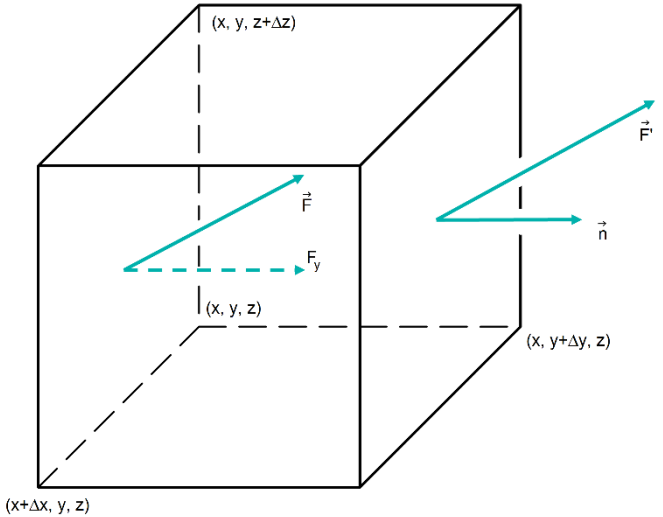
FH AACHEN UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Vektoranalysis

Gauß'scher Integralsatz

Physikalische Herleitung

Wir suchen den Fluss des Vektorfeldes $\vec{F}$ durch die Oberfläche eines Würfels.



Fluss durch rechte Seite…

Allgemein Fluss in y-Richtung per Oberflächenintegral…

$$\Phi_R = \iint F_y \, dx \, dz$$

(Plus, da Normale in $\vec{F}$-Richtung zeigt!)

Wir erhalten analog…

Approximation: $F_y \approx F_y(x, y + \Delta y, z)$

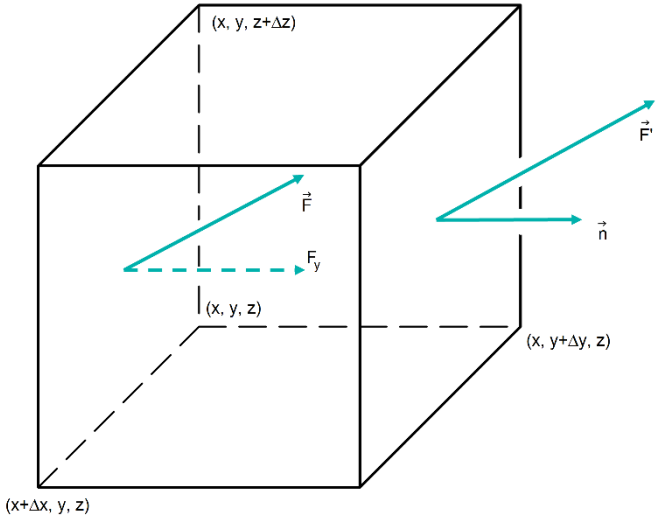
Approximierter Fluss: $\Phi_R \approx F_y(x, y + \Delta y, z)\Delta x \Delta z$

Linearisierung um (x, y, z): $\Phi_R \approx \left(F_y(x, y, z) + \partial_y F_y(x, y, z)\Delta y\right) \Delta x \Delta z$

Gauß'scher Integralsatz

Physikalische Herleitung

Wir suchen den Fluss des Vektorfeldes $\vec{F}$ durch die Oberfläche eines Würfels.



Fluss durch linke und rechte Seite...

Wir addieren die Ergebnisse für links und rechts…

Linke Seite: $\Phi_L \approx -F_y(x,y,z)\Delta x\Delta z$

Rechte Seite: $\Phi_R \approx \left(F_y(x,y,z) + \partial_y F_y(x,y,z)\Delta y\right)\Delta x\Delta z$

+

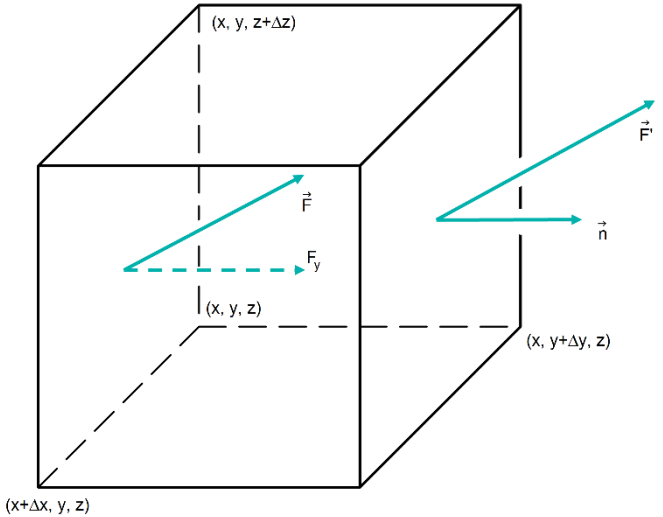
Gesamtfluss (links & rechts) $\Phi_{LR} \approx \partial_y F_y(x,y,z)\Delta x\Delta y\Delta z$

Vektoranalysis

Gauß'scher Integralsatz

Physikalische Herleitung

Wir suchen den Fluss des Vektorfeldes $\vec{F}$ durch die Oberfläche eines Würfels.



Fluss oben und unten...

Wir gehen analog vor und erhalten…

$$\Phi_{OU} \approx \partial_z F_z(x,y,z)\Delta x\Delta y\Delta z$$

Fluss vorne und hinten...

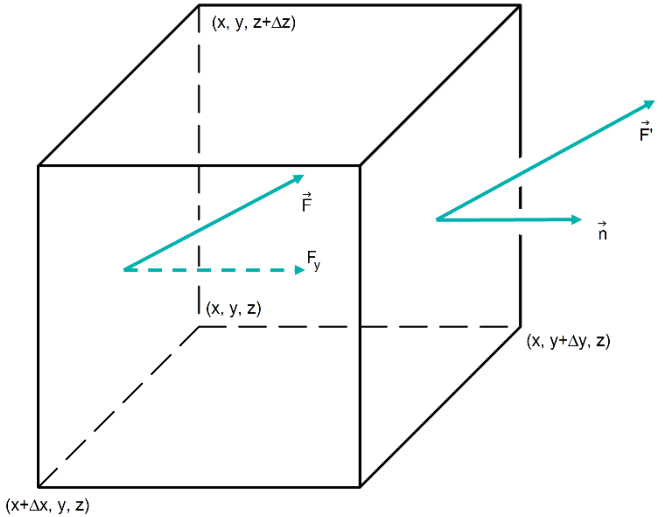
$$\Phi_{VH} \approx \partial_x F_x(x,y,z)\Delta x\Delta y\Delta z$$

Vektoranalysis

Gauß'scher Integralsatz

Physikalische Herleitung

Wir suchen den Fluss des Vektorfeldes $\vec{F}$ durch die Oberfläche eines Würfels.



Gesamtfluss für den kleinen Würfel

Wir summieren über alle Seiten…

$$\Phi_{LR} \approx \partial_y F_y(x,y,z)\Delta x\Delta y\Delta z$$
$$\Phi_{OU} \approx \partial_z F_z(x,y,z)\Delta x\Delta y\Delta z$$
$$\Phi_{VH} \approx \partial_x F_x(x,y,z)\Delta x\Delta y\Delta z \quad \Big| \; +$$

$$\Phi_W \approx \Big(\partial_x F_x(x,y,z) + \partial_y F_y(x,y,z) + \partial_z F_z(x,y,z)\Big) \cdot \Delta x\Delta y\Delta z$$

$$\Phi_W = \oiint_{\partial \text{Würfel}} \vec{F} \cdot \overrightarrow{dA} \approx \Big(\partial_x F_x(x,y,z) + \partial_y F_y(x,y,z) + \partial_z F_z(x,y,z)\Big) \cdot \Delta x\Delta y\Delta z$$

Vektoranalysis

Gauß'scher Integralsatz

Physikalische Herleitung

Wir suchen den Fluss des Vektorfeldes $\vec{F}$ durch die Oberfläche eines Würfels.



Fluss durch alle Seiten…

$$\Phi_W = \oiint_{\partial\text{Würfel}} \vec{F} \cdot \overrightarrow{dA} \approx \underbrace{\left(\partial_x F_x(x,y,z) + \partial_y F_y(x,y,z) + \partial_z F_z(x,y,z)\right)}_{= \operatorname{div} \vec{F}} \cdot \Delta x \Delta y \Delta z$$

Wie bestimmen wir den Fluss durch ein beliebiges Volumen?

Wir spielen Lego und setzen das beliebige Volumen aus kleinen Würfeln zusammen…

Wir summieren die Flüsse der einzelnen Würfel auf…

$$\Rightarrow \quad \oiint_{\partial V} \vec{F} \cdot \overrightarrow{dA} = \sum_{\text{Würfel}} \operatorname{div} \vec{F} \cdot \Delta x \Delta y \Delta z$$

FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

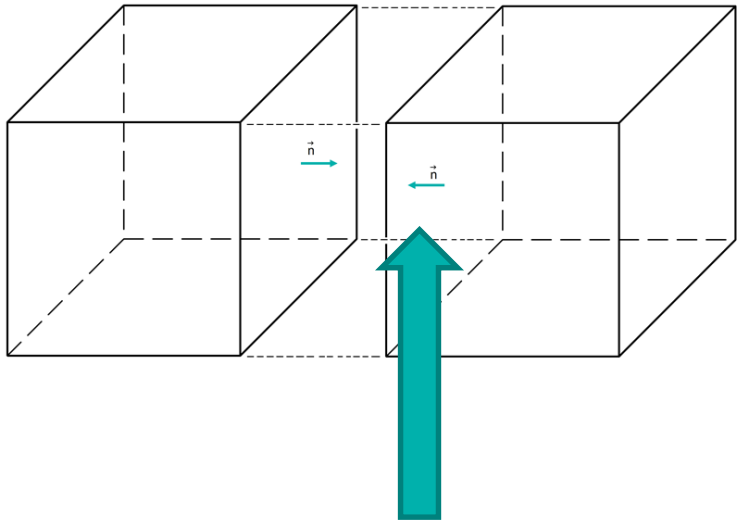
Vektoranalysis

Gauß'scher Integralsatz

Physikalische Herleitung

Wir betrachten unser Vorgehen kritisch…

Wird der Fluss durch die Innenseiten der Würfel nicht doppelt gezählt?



Die Normalen zeigen in entgegengesetzte Richtungen

→ Die Anteile haben unterschiedliches Vorzeichen…

→ Die Anteile heben sich gegenseitig auf…

→ Es wird nichts doppelt gezählt…

Physikalische Herleitung



Wie geht es weiter?

$$\oiint_{\partial V} \vec{F} \cdot \overrightarrow{dA} = \sum_{\text{Würfel}} \operatorname{div} \vec{F} \cdot \Delta x \Delta y \Delta z$$

Wir bilden den Grenzwert und lassen die kleinen Würfel gegen null gehen…

$$\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z \to 0$$

$$\oiint_{\partial V} \vec{F} \cdot \overrightarrow{dA} = \iiint_{V} \operatorname{div} \vec{F} \cdot dx\, dy\, dz$$

Gauß'scher Integralsatz

Gauß'scher Integralsatz

Bemerkungen zum Gauß'schen Integralsatz

$$\oiint_{\partial V} \vec{F} \cdot \overrightarrow{dA} = \iiint_{V} \operatorname{div} \vec{F} \cdot dx\, dy\, dz$$

Der Gauß'sche Satz verknüpft den Fluss eines Vektorfeldes $\vec{F}$ durch die Außenfläche ∂V eines Volumens V (linke Seite) mit der Quellstärke ($\operatorname{div} \vec{F}$) im Innern des Volumens (rechte Seite, Volumenintegral)

Bei typischen Anwendungen ist der Fluss durch ∂V gesucht. An Stelle des komplizierten Oberflächenintegrals, wenden wir den Gauß'schen Satz an und berechnen das Volumenintegral über die Divergenz.

Für quellfreie Vektorfelder ist der Fluss durch die Oberfläche nach dem Gauß'schen Satz null.

Gauß'scher Integralsatz

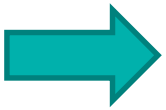
Fluss eines Magnetfeldes

Wir betrachten ein Magnetfeld $\vec{B}$ in einem beliebigen Volumen V.

Dann gilt für den Fluss durch die Volumenoberfläche ∂V…

$$\Phi = \oiint_{\partial V} \vec{B} \cdot \overrightarrow{dA} = \iiint_{V} \underbrace{\operatorname{div} \vec{B}}_{=0} \cdot dx\, dy\, dz = 0$$

(Maxwell Gleichung)

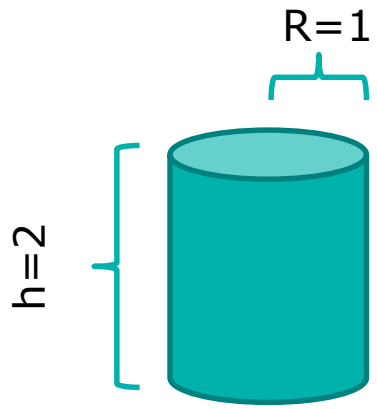


Der magnetische Fluss verschwindet!

Gauß'scher Integralsatz

Anwendungsbeispiel: Fluss berechnen

Wir suche den Fluss des Vektorfeldes $\vec{F}$ durch die Oberfläche des Zylinders mit Radius R=1 und Höhe h=2.



$$\vec{F} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{div} \vec{F} = 1$$

Formel für Fluss:

Gauß'scher Satz

$$\iint_{\partial Z} \vec{F} \cdot \overrightarrow{dA} = \iiint_{Z} \operatorname{div} \vec{F} \cdot dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{2} \int_0^{1} r \, dr \, dz \, d\varphi = 2\pi$$

Zylinderkoord.

- Zylinderoberfläche aufteilen (Boden & Deckel, Mantel)
- Flächen parametrisieren
- Normalen ausrechen
- Integrale berechnen

Vektoranalysis

Gauß'scher Integralsatz

Anwendungsbeispiel: Kontinuitätsgleichung

Wir wollen die Kontinuitätsgleichung für die Ladungserhaltung herleiten…

Vorgehensweise:

Wir betrachten ein beliebiges Volumen V, in dem die Ladungsverteilung durch die Ladungsdichte $\rho(\vec{x},t)$ beschrieben wird.

Gesamtladung… $$Q(t) = \iiint_V \rho(\vec{x},t)dV$$

Die Gesamtladung kann sich auf Grund der Ladungserhaltung nur dann mit der Zeit ändern, wenn Ladungen durch die Oberfläche ∂V ein- oder austreten.

Die ein- und austretenden Ladungen werden durch die Ladungsstromdichte $\vec{j}\,(\vec{x},t)$ beschrieben, d.h. die pro Zeiteinheit und Fläche austretende Ladung.

Vektoranalysis

Gauß'scher Integralsatz

Anwendungsbeispiel: Kontinuitätsgleichung

Wir wollen die Kontinuitätsgleichung für die Ladungserhaltung herleiten…

Vorgehensweise:

Gesamtladung… $$Q(t) = \iiint_V \rho(\vec{x}, t) dV$$

Für die zeitliche Änderung der Ladung finden wir dann…

$$\partial_t Q(t) = \partial_t \iiint_V \rho(\vec{x}, t) dV = -\oiint_{\partial V} \vec{j}\,(\vec{x}, t) \cdot \overrightarrow{dA} = -\iiint_V \operatorname{div} \vec{j}\,(\vec{x}, t)\, dV$$

(Gauß'scher Satz)

Die Normale zeigt nach außen. Fließen Ladungen ab, so zeigen $\vec{j}$ und $\overrightarrow{dA}$ in die gleiche Richtung, d.h. damit der Beitrag negativ gezählt wird, benötigen wir ein Minuszeichen…

Vektoranalysis

Gauß'scher Integralsatz

Anwendungsbeispiel: Kontinuitätsgleichung

Wir wollen die Kontinuitätsgleichung für die Ladungserhaltung herleiten…

Vorgehensweise:

Zeitliche Änderung der Ladung…

$$\partial_t \iiint_V \rho(\vec{x},t)dV = -\iiint_V \operatorname{div}\,\vec{j}\,(\vec{x},t)\,dV$$

Wir können Differentiation und Integration vertauschen!

$$\iiint_V \partial_t\rho(\vec{x},t)dV = -\iiint_V \operatorname{div}\,\vec{j}\,(\vec{x},t)\,dV$$

Vektoranalysis

Gauß'scher Integralsatz

Anwendungsbeispiel: Kontinuitätsgleichung

Wir wollen die Kontinuitätsgleichung für die Ladungserhaltung herleiten…

Vorgehensweise:

Wir haben folgenden Ausdruck gefunden…

$$\iiint_V \partial_t \rho(\vec{x},t) dV = -\iiint_V \operatorname{div} \vec{j}\,(\vec{x},t)\, dV$$

Da wir ein beliebiges Volumen V gewählt haben, gilt die Beziehung für alle möglichen Volumina.

In diesem Fall gilt auch Gleichheit für die Ausdrücke im Integral…

$$\Rightarrow \quad \partial_t \rho(\vec{x},t) = -\operatorname{div} \vec{j}\,(\vec{x},t) \quad \Rightarrow \quad \partial_t \rho(\vec{x},t) + \operatorname{div} \vec{j}\,(\vec{x},t) = 0$$

(Kontinuitätsgleichung)